

САМОПОДІБНА ФАЗОВА ДИНАМІКА МЕЖОВОГО ТЕРТЯ

О.В. ХОМЕНКО, Я.О. ЛЯШЕНКО, В.М. БОРИСЮК

УДК 539.62:621.891(043.3)
© 2009

Сумський державний університет
(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007; e-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua, nabla04@ukr.net)

Досліджено плавлення ультратонкої плівки мастила, затиснутої між двома атомарно-гладкими твердими поверхнями. При врахуванні адитивних шумів напружень, деформації і температури побудовано фазову діаграму з областями рідинного, сухого і переривчастого тертя. Для параметрів усіх режимів у межах числення Стратоновича побудовано часові ряди напружень. У випадку, коли інтенсивність шуму температури набагато перевищує інтенсивності шумів напружень і деформації, встановлюється самоподібний режим при плавленні мастила. Показано, що мультифрактальність часових рядів напружень забезпечується степеневим виглядом функції розподілу і наявністю в системі кореляцій.

ператури [11]. Розглянуто особливості гістерезисної поведінки [12, 13] і плавлення за рахунок дисипативного розігріву [14].

Варто зазначити, що у ролі мастил у таких системах можуть використовуватися металеві моношари, осаджені на слюду [15]. Причому, в режимі межового тертя, як показано у роботі [16], формується фрактальна морфологія поверхні. У роботах [17–19] наведено експериментальні дані і теоретичні моделі, які свідчать про самоподібний характер переривчастого режиму при сухому терті. Зокрема, за допомогою приладу для випробувань гладких поверхонь тертя із сталі та алюмінію за схемою “штифт–диск” показано [17], що розподіл імовірності стрибків сили тертя має степеневий вигляд із показником в інтервалі 2,2–5,4, а спектральна густина потужності відповідає співвідношенню $1/f^\alpha$ із α в інтервалі 1–2,6. Самоподібний режим, що спричиняється флуктуаціями температури, знайдено в межах реологічної моделі в роботі [10] на основі методу, описаного в роботі [20]. Запропонована робота має на меті аналіз часових рядів напружень, що виникають у мастилі, в межах реологічної моделі. Показано причину мультифрактальної поведінки часових рядів у процесі межового тертя.

1. Вступ

Зацікавленість проблемами тертя ковзання зумовлена значним прикладним значенням щодо застосування в різних сферах науки і техніки [1]. В останні роки активно проводяться дослідження атомарно-гладких поверхонь, що розділені ультратонким шаром мастила. Таким системам притаманна аномальна поведінка, що може виявлятися у наявності декількох кінетичних режимів тертя, переходи між якими можуть бути інтерпретовані як фазові перетворення [2]. При цьому рідке мастило демонструє властивості твердого тіла [3]. Характерною особливістю таких систем тертя є переривчастий рух (stick-slip), притаманний сухому тертю [4, 5]. Такий режим спостерігається при товщині плівки мастила, меншій за три молекулярні шари, і пояснюється як періодичне твердіння, зумовлене стисненням стінок. Мастило плавиться під час зміщення у тому випадку, коли зсувні напруження σ , що виникають у шарі, перебільшують критичне значення σ_c (межа текучості) завдяки ефекту “зсувного плавлення”. У зв’язку з підвищеною зацікавленістю такими системами пропонується декілька моделей для опису зазначених закономірностей. Так, існують детерміністична [4] і стохастична [6] механістичні моделі, термодинамічна [7] та реологічна [8] моделі. У межах останньої моделі досліджено вплив на плавлення адитивних некорельованих шумів основних параметрів [9, 10], а також корельованих флуктуацій тем-

2. Основні рівняння

У роботі [8] на основі реологічного опису в’язкопружного середовища, що має теплопровідність, отримано систему кінетичних рівнянь, що визначають взаємно узгоджену поведінку зсувних напружень σ і деформації ε , а також температури T в ультратонкій плівці мастила під час тертя між атомарно-гладкими твердими поверхнями. Головне припущення використаного підходу полягає у тому, що релаксаційне рівняння для σ має вигляд

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + G\varepsilon, \quad (1)$$

де перший доданок правої частини описує дебаївську релаксацію за час $\tau_\sigma \equiv \eta_\sigma/G$, що визначається ефективною в’язкістю η_σ та нерелаксованим моду-

лем зсуву $G \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ (ω – кругова частота періодичного зовнішнього впливу). Внаслідок заміни ε/τ_σ на $\partial\varepsilon/\partial t$ рівняння (1) зводиться до співвідношення Максвелла для опису в'язкопружного середовища, що широко використовується в теорії межового тертя [1]:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\tau_\sigma} + G \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

У стаціонарному випадку $\dot{\sigma} = 0$ (1) приводить до закону Гука $\sigma = G\varepsilon$.

Релаксаційна поведінка в'язкопружного мастила у процесі тертя описується також рівнянням Кельвіна–Фойгта [21]:

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon/\tau_\varepsilon + \sigma/\eta, \quad (3)$$

де τ_ε – час релаксації деформації, η – зсувна в'язкість. Другий доданок у правій частині описує течію в'язкої рідини під дією зсувної компоненти напружень. У стаціонарному випадку $\dot{\varepsilon} = 0$ маємо вираз, подібний до закону Гука $\sigma = G_\varepsilon\varepsilon$, де $G_\varepsilon \equiv \eta/\tau_\varepsilon \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$ – релаксоване значення модуля зсуву. Оскільки формально рівняння (1) не може бути зведено до рівняння Кельвіна–Фойгта (3) [21, 22], у роботі припускається, що ефективна в'язкість $\eta_\sigma \equiv \tau_\sigma G$ не збігається з дійсним значенням η . Крім цього, слід прийняти найпростіше наближення для температурних залежностей: $G_\varepsilon(T)$, $G(T)$, $\eta_\sigma(T) = \text{const}$,

$$\eta = \frac{\eta_0}{T/T_c - 1}, \quad (4)$$

де η_0 – характерне значення зсувної в'язкості η при $T = 2T_c$. Це зумовлено тим, що параметри G_ε , G , η_σ дуже слабо залежать від температури, тоді як дійсна в'язкість η має розбіжність при зменшенні температури до критичного значення T_c [23, 24]. Разом рівняння (1), (3), (4) подають нову реологічну модель. Реологічні властивості плівки мастила досліджуються експериментально, що дозволяє побудувати фазову діаграму [3].

Згідно з синергетичною концепцією [25, 26] для доповнення системи рівнянь (1), (3), які мають параметр порядку σ , спряжене поле ε та керуючий параметр T , необхідно отримати кінетичне рівняння для температури. Таке рівняння може бути виведене із основних співвідношень теорії пружності [22]. Будемо виходити із виразу, що пов'язує похідні за часом від ентропії S та внутрішньої енергії U з рівноважним пружним напруженням σ_{el} :

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dU}{dt} - \sigma_{el} \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (5)$$

що являє собою другий початок термодинаміки у випадку механічного навантаження твердого тіла (у рівновазі зміна кількості тепла $\delta Q = T dS$). У нерівноважному випадку неоднорідного нагрівання середовища цей зв'язок має вигляд

$$-\text{div } \mathbf{q} = \frac{dU}{dt} - \sigma \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (6)$$

Тут потік тепла визначається співвідношенням Онзагера:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (7)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності, і повне напруження $\sigma = \sigma_{el} + \sigma_v$ містить також в'язку складову σ_v . Віднімаючи (6) від (5), враховуючи вираз

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial U} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\varepsilon \frac{dT}{dt} + \frac{\partial S}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right)_U \frac{d\varepsilon}{dt} = \\ &= \frac{\rho c_v}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma_{el}}{T} \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned} \quad (8)$$

та припускаючи, що шар мастила та атомарно-гладкі поверхні тертя мають різні температури T і T_e відповідно, маємо [8]:

$$\rho c_v \dot{T} = \frac{\kappa}{l^2} (T_e - T) + \sigma_v \dot{\varepsilon} + T \frac{\partial \sigma_{el}}{\partial T} \dot{\varepsilon}. \quad (9)$$

В останньому рівнянні ρ – густина мастила; c_v – питома теплоємність; l – товщина мастила або відстань між поверхнями, що труться, а також використані наближення $(\kappa/l^2)(T_e - T) \approx -\text{div } \mathbf{q}$ і $\partial U/\partial \varepsilon = \sigma_{el} - T \partial \sigma_{el}/\partial T$. Перший доданок у правій частині (9) описує передачу тепла від шару мастила до поверхонь тертя, другий враховує дисипативний розігрів в'язкої рідини, що тече під дією напружень [27], а третій представляє джерело тепла, зумовлене оборотним механокалоричним ефектом, для якого у лінійному наближенні $T(\partial \sigma_{el}/\partial T)\dot{\varepsilon} \approx \sigma_{el}\dot{\varepsilon}$. У результаті рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$\rho c_v \dot{T} = \frac{\kappa}{l^2} (T_e - T) + \sigma \dot{\varepsilon}. \quad (10)$$

Тепер система рівнянь (1), (3), (10) є повною і при цьому має три ступеня свободи, що дозволяє описувати нетривіальну поведінку під час плавлення тонкої плівки мастила [25].

Обезрозмірювання рівнянь (1), (3), (10) дозволить скоротити число сталих, що розглядаються. Введемо одиниці виміру для змінних σ , ε , T :

$$\sigma_s = \left(\frac{\rho c_v \eta_0 T_c}{\tau T} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_0}, \quad T_c, \quad (11)$$

де $G_0 \equiv \eta_0/\tau_\varepsilon$ – характерне значення модуля зсуву, $\tau_T \equiv \rho l^2 c_v/\kappa$ – час теплопровідності. Тоді після підстановки в (10) похідної $\dot{\varepsilon}$, вираженої з формули (3), рівняння (1), (3), (10) набувають вигляду

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g\varepsilon + \sqrt{I_\sigma} \xi_1(t), \quad (12)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma + \sqrt{I_\varepsilon} \xi_2(t), \quad (13)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2 + \sqrt{I_T} \xi_3(t), \quad (14)$$

де введено константу $g = G/G_0 < 1$. Ці рівняння формально збігаються з синергетичною системою Лоренца [28], в якій зсувні напруження відіграють роль параметра порядку, спряжене поле зводиться до зсувної деформації, а температура є керувальним параметром. Як відомо, така система використовується для опису фазових термодинамічних [25] і кінетичних [26] перетворень.

У рівняннях (12)–(14) для урахування впливу флуктуацій основних параметрів введено δ -корельовані гаусові стохастичні джерела $\xi_i(t)$ з інтенсивностями I_σ, I_ε та I_T , котрі, в свою чергу, виміряно в одиницях $\sigma_s^2, \varepsilon_s^2 \tau_\varepsilon^{-2}, (T_c \kappa/l)^2$ відповідно [9]. Моменти функцій $\xi_i(t)$ визначаються так¹:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (15)$$

У роботі [8] плавлення мастила подано як результат спонтанної появи зсувних напружень під час розігріву поверхонь тертя вище критичного значення $T_{c0} = 1 + g^{-1}$. Початковою причиною процесу самоорганізації є додатний зворотний зв'язок T і σ з ε (див. (13)), зумовлений температурною залежністю зсувної в'язкості (4), що приводить до її розбіжності. З іншого боку, від'ємний зворотний зв'язок σ і ε з T в (14) відіграє важливу роль, оскільки забезпечує стійкість системи.

Відповідно до такого підходу мастило являє собою дуже в'язку рідину, що поводить себе наче аморфне тверде тіло – має велику ефективну в'язкість і все ще характеризується межею текучості [3, 21]. Його твердоподібний стан відповідає зсувним напруженням $\sigma = 0$, оскільки при цьому рівняння (12) випадає із розгляду ($\dot{\sigma} = 0$). Рівняння (13), що містить в'язкі напруження, можна звести до закону Дебая, що являє швидку релаксацію зсувної деформації за мікроскопічний час $\tau_\varepsilon \approx a/c \sim 10^{-12}$ с, де $a \sim 1$ нм – стала

ґратки або міжмолекулярна відстань і $c \sim 10^3$ м/с – швидкість звуку. При цьому рівняння теплопровідності (14) набуває вигляду найпростішого виразу для релаксації температури до значення T_e , з якого зникають доданки, що представляють дисипативний розігрів та механокалоричний ефект в'язкої рідини.

При ненульових значеннях напружень σ рівняння (12)–(14) описують зазначені вище властивості, притаманні рідиноподібному стану мастила. Така поведінка сильно відрізняється від об'ємних змащувальних матеріалів і потребує детального пояснення. Згідно з рівнянням (13) поява в'язких напружень σ_v приводить до пластичної течії рідиноподібного мастила зі швидкістю $V = l \partial \varepsilon / \partial t$. Зокрема, у випадку апарату поверхневих сил [29, 30] у рівняннях (12) – (14) ефективна амплітуда деформації $\varepsilon = x_{\max}/l$ визначається через відношення амплітуди деформації (відхилення) x_{\max} до товщини мастила l . Ефективна швидкість зміщення $\dot{\varepsilon} = \varepsilon \omega = V/l = \varepsilon/\tau_\sigma$ являє собою добуток деформації ε та частоти коливань ω .

У роботі [7] показано, що пластична течія шару мастила реалізується за наявності у ньому пружних напружень. При цьому дія зсувних напружень приводить до зменшення модуля зсуву змащувального матеріалу [31]. Відповідно до [32] під час межового режиму тертя зі збільшенням в'язких напружень

$$\sigma_v = \frac{F_v}{A} \quad (16)$$

збільшується в'язка сила тертя:

$$F_v = \frac{\eta_{\text{eff}} V A}{l}, \quad (17)$$

де η_{eff} – ефективна в'язкість, котра не збігається з дійсною в'язкістю і знаходиться лише експериментально [32]; A – площа контакту. Комбінування рівнянь (16) і (17) дає вираз для швидкості через напруження:

$$V = \frac{\sigma_v l}{\eta_{\text{eff}}}. \quad (18)$$

Таким чином, зі зростанням зсувних напружень збільшується відносна швидкість руху контактуючих поверхонь, і мастило плавиться.

Більше того, відповідно до [5] за відсутності деформації зсуву теплове середньоквадратичне відхилення молекул (атомів) визначається рівністю $\langle u^2 \rangle = T/Ga$. Середнє значення відхилення за рахунок зміщення знаходимо із співвідношення $\langle u^2 \rangle = \sigma^2 a^2 / G^2$. Повне середнє квадратичне відхилення дорівнює сумі цих

¹ Множник 2 вибраний для того, щоб відповідне рівняння Фоккера–Планка (РФП) мало більш простий вигляд.

виразів за умови, що теплові флуктуації і напруження не пов'язані. Це означає, що плавлення мастила спричинено як нагріванням, так і впливом напружень, створених твердими поверхнями під час тертя. Останнє узгоджується із розглядом нестійкого твердоподібного стану в межах подання зсувного динамічного плавлення за відсутності теплових флуктуацій. Таким чином, флуктуації деформації, що пов'язані з напруженнями, і теплові флуктуації слід розглядати окремо. Будемо вважати, що плівка мастила стає більш рідкоподібною, і сила тертя зменшується зі зростанням температури за рахунок зменшення енергії активації стрибків молекул.

3. Динамічна фазова діаграма

Для подальшого дослідження системи будемо діяти в межах методу, описаного в роботі [20]. Використовуючи адіабатичне наближення $\tau_\sigma \gg \tau_\varepsilon, \tau_T$ [8, 10] в рівняннях (13), (14), можна покласти $\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \approx 0, \tau_T \dot{T} \approx 0$, після чого останні приводять до таких залежностей:

$$\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \xi_4(t), \quad T(t) = \bar{T} + \tilde{T} \xi_5(t), \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon} \equiv \sigma (T_e - 1 + \sigma^2) d(\sigma), \quad \tilde{\varepsilon} \equiv \sqrt{I_\varepsilon + I_T \sigma^2} d(\sigma),$$

$$\bar{T} \equiv (T_e + 2\sigma^2) d(\sigma), \quad \tilde{T} \equiv \sqrt{I_T + I_\varepsilon \sigma^2} d(\sigma), \quad (20)$$

де $d(\sigma) \equiv (1 + \sigma^2)^{-1}$. У них детерміністичні складові можна звести до рівностей, отриманих у [8], а флуктуаційні походять із відомої властивості адитивності дисперсій гаусових випадкових величин [33]. Таким чином, синергетичний принцип підпорядкування [25, 26] перетворює адитивні шуми деформації ε і температури T на мультиплікативні. В результаті вирази (12), (19) і (20) приводять до рівняння Ланжевена [9, 10, 14]:

$$\dot{\sigma} = f(\sigma) + \sqrt{I(\sigma)} \xi(t), \quad (21)$$

де час t виміряно в одиницях часу релаксації напружень τ_σ .

Узагальнена сила $f(\sigma)$, а також ефективна інтенсивність шуму $I(\sigma)$ подаються рівностями [9]:

$$f(\sigma) \equiv -\sigma + g\sigma [1 - (2 - T_e)(1 + \sigma^2)^{-1}],$$

$$I(\sigma) \equiv I_\sigma + g^2(I_\varepsilon + I_T \sigma^2)(1 + \sigma^2)^{-2}. \quad (22)$$

Для запобігання непорозумінь варто зазначити, що безпосереднє підставлення (19) і (20) в (12) приводить до стохастичної добавки

$$\left[I_\sigma^{1/2} + g \left(I_\varepsilon^{1/2} + I_T^{1/2} \sigma \right) (1 + \sigma^2)^{-1} \right] \xi(t), \quad (23)$$

квадрат амплітуди якої відрізняється від ефективної інтенсивності шуму (22). Більше того, безпосереднє використання адіабатичного наближення в (13) і (14) приводить до флуктуаційних доданків у залежностях (19) у вигляді $\tilde{\varepsilon} \equiv (I_\varepsilon^{1/2} + I_T^{1/2} \sigma) d(\sigma)$, $\tilde{T} \equiv (I_T^{1/2} - I_\varepsilon^{1/2} \sigma) d(\sigma)$. Останній доданок, очевидно, не є фізичним, оскільки ефективний шум температури \tilde{T} повністю зникає при напруженнях $\sigma = \sqrt{I_T/I_\varepsilon}$. Формальною причиною такого протиріччя є те, що до рівняння Ланжевена не можуть бути застосовані звичайні методи аналізу [33].

Для подальшого розгляду домножимо (21) на dt і отримаємо диференціальне співвідношення Ланжевена:

$$d\sigma = f(\sigma)dt + \sqrt{I(\sigma)}dW(t), \quad (24)$$

де $dW(t) = W(t + dt) - W(t) \equiv \xi(t)dt$ – вінерівський процес із властивостями [35]:

$$\langle dW(t) \rangle = 0; \quad \langle (dW(t))^2 \rangle = 2dt. \quad (25)$$

У загальному випадку рівнянню (24) може відповідати множина форм РФП. У роботах [10, 14] використовувалось РФП у формі Іто, оскільки воно має більш простий вигляд. У подальшому будемо виходити із числення Стратоновича, оскільки останнє дозволяє автоматично врахувати ефекти пам'яті, що наявні під час плавлення ультратонких плівок мастила за рахунок їх малих розмірів. Відповідне РФП з урахуванням (25) записується у вигляді

$$\frac{\partial P(\sigma, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} [f(\sigma)P(\sigma, t)] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{I(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{I(\sigma)} P(\sigma, t) \right]. \quad (26)$$

З часом розподіл розв'язків (24) стає стаціонарним, і його явний вигляд може бути знайдено з (26) при $\partial P(\sigma, t)/\partial t = 0$:

$$P(\sigma) = \mathcal{Z}^{-1} \exp\{-U(\sigma)\}, \quad (27)$$

де ефективний потенціал подається рівністю

$$U(\sigma) = \frac{1}{2} \ln I(\sigma) - \int_0^\sigma \frac{f(\sigma')}{I(\sigma')} d\sigma'. \quad (28)$$

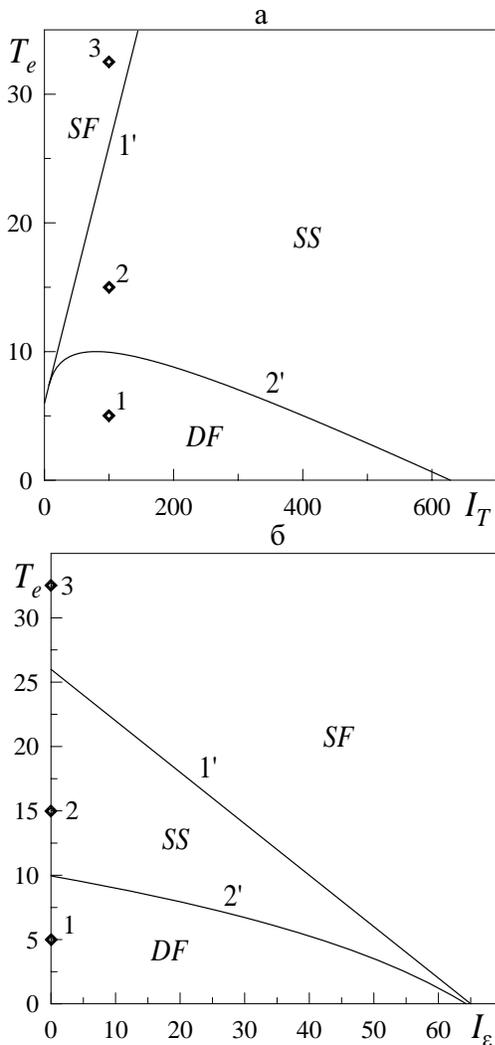


Рис. 1. Фазові діаграми при $g = 0,2$ з областями рідинного (SF), сухого (DF) і переривчастого (SS) тертя: a – при $I_\epsilon = 0$; b – при $I_T = 100$

Точки екстремуму розподілу (27) визначаються умовою $dU/d\sigma \equiv dI/d\sigma - 2f = 0$. Або в явному вигляді:

$$(1 - g)x^3 + g(2 - T_\epsilon)x^2 - g^2 I_T x + 2g^2 (I_T - I_\epsilon) = 0, \quad (29)$$

де $x \equiv 1 + \sigma^2$. Вираз (29) відрізняється від отриманого в [9, 10]. Однак, при збільшенні в (29) інтенсивностей шумів I_T, I_ϵ в 2 рази розрізнення зникає. Тому проведений далі аналіз, що ґрунтується на вивченні екстремумів функцій розподілу (побудова фазових діаграм, інтерпретування стаціонарних станів) при використанні числення Стратоновича збігається з результатами, отриманими в межах підходу Іто [10]. Однак, потенціал (28) не можна звести до раніше отриманого

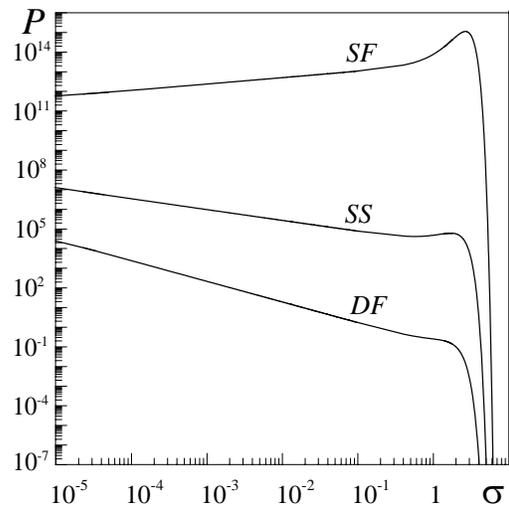


Рис. 2. Функція розподілу (27) при $I_\sigma = 10^{-20}$, $I_\epsilon = 0$, $I_T = 100$ і режимах, показаних точками на рис. 1: 1 – $T_\epsilon = 5$ (DF); 2 – $T_\epsilon = 15$ (SS); 3 – $T_\epsilon = 32,5$ (SF)

[10] простим перенормуванням інтенсивностей шумів, оскільки він відрізняється від останнього тільки виглядом першого доданка (наявністю коефіцієнта $1/2$). Тому часові ряди напружень різняться. Оскільки запропонована робота має на меті дослідження особливостей еволюції напружень у часі, то ми використовуємо числення Стратоновича.

За фіксованої інтенсивності I_ϵ фазова діаграма має вигляд, показаний на рис. 1, a , при фіксованій інтенсивності I_T – на рис. 1, b . Лінії $1', 2'$ на діаграмах відповідають межах утрати стійкості системи. Пряма $1'$ визначається рівністю

$$T_\epsilon = 1 + g^{-1} + g(I_T - 2I_\epsilon), \quad (30)$$

що походить із (29), і подає межу існування ненульового стаціонарного розв'язку $\sigma_0 = 0$. Нижче цієї прямої завжди реалізується максимум $P(\sigma)$ при $\sigma = 0$, а вище неї цей максимум не існує. На діаграмі видно три області, які відповідають різним режимам тертя. Фактично обидва рисунки є площинними перерізами тривимірної фазової діаграми в координатах $T_\epsilon - I_\epsilon - I_T$. Тому аналізовані далі точки 1–3 на обох діаграмах вибрано на перетині січних площин у такий спосіб, що відповідають однаковим параметрам системи.

На рис. 2 показано ненормований розподіл ймовірності (27), що відповідає точкам на рис. 1. Точка 1 знаходиться в області сухого тертя DF фазової діаграми, тому спостерігається один максимум функції розподілу при $\sigma_0 = 0$.

Двофазна область SS діаграми характеризується співіснуванням максимумів розподілу $P(\sigma)$ при нульовому і ненульовому значеннях напружень (точка 2). Точка 3 знаходиться в області, де спостерігається один максимум розподілу ймовірності при $\sigma_0 \neq 0$, що відповідає режиму рідинного тертя або ковзання.

Залежності $P(\sigma)$ на рис. 2 побудовано в подвійно-му логарифмічному масштабі. Видно, що для кривих DF и SS розподіл набуває спадаючого степеневого вигляду. Такий режим відповідає значенням $\sigma \ll 1$ і $I_\sigma, I_\varepsilon \ll I_T$, при котрих (27) можна звести до вигляду $P(\sigma) = \sigma^{-1} \mathcal{P}(\sigma)$,

$$(31)$$

де функція $\mathcal{P}(\sigma)$ визначається виразом

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sigma) = & Z^{-1} g^{-1} I_T^{-1/2} (1 + \sigma^2) \times \\ & \times \exp \left\{ I_T^{-1} g^{-1} \left[\frac{\sigma^4}{4} (1 - g^{-1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (T_e - 1 - g^{-1}) \ln \sigma + \sigma^2 \left(\frac{T_e}{2} - g^{-1} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Як відомо, самоподібним системам відповідає однорідна функція розподілу [34]. Розподіл (31) буде однорідним у тому випадку, коли функція (32) – константа. За малих значень напружень множник перед експонентою $1 + \sigma^2 \rightarrow 1$. Проаналізуємо доданки під знаком експоненти, котрі роблять внесок у розподіл. Перший доданок під час малих напружень за рахунок четвертої степені робить незначний внесок, а оскільки $g < 1$, він завжди від’ємний, тобто, з іншого боку, під час великих напружень розподіл набуває експоненціально спадаючого вигляду. Другий та третій доданки при високих значеннях температури із зростом напружень також зростають, тому, як видно із рис. 2, в режимі SF степенева асимптотика $P(\sigma) \propto \sigma^{-1}$ не спостерігається, і ймовірність за малих значень стає зростаючою функцією. Таким чином, наявну самоподібну поведінку слід очікувати при температурах, для котрих в області $\sigma < 1$ другий і третій доданки із зростом напружень зменшуються, тобто при $T_e < 1 + g^{-1}$.

Числення Стратоновича привело до першої вагомій відмінності у порівнянні з підходом Іто: в (31) показник розподілу дорівнює -1 , у той час як в [10] він набуває значення -2 .

4. Часові ряди напружень

Для чисельного розв’язання рівняння (24) використаємо метод Ейлера. Однак, оскільки в нашому випадку (24) являє собою СДУ Стратоновича, ітераційна

процедура буде відрізнятися від використаної в роботі [14]. Для застосування звичайної ітераційної процедури необхідно від СДУ Стратоновича перейти до еквівалентного СДУ Іто. Рівнянню (24) з урахуванням (25) відповідає СДУ Іто у вигляді [35, 36]:

$$d\sigma = \left[f(\sigma) + \sqrt{I(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{I(\sigma)} \right] dt + \sqrt{I(\sigma)} dW(t). \quad (33)$$

З урахуванням визначення дискретного аналога диференціала випадкової сили $dW(t) \equiv \sqrt{\Delta t} W_i$ і (22) отримуємо ітераційну процедуру для розв’язання рівняння (33):

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} = & \sigma_i + \left(f(\sigma_i) + \frac{g^2 \sigma_i [I_T (1 - \sigma_i^2) - 2I_\varepsilon]}{(1 + \sigma_i^2)^3} \right) \Delta t + \\ & + \sqrt{I(\sigma_i)} \Delta t W_i. \end{aligned} \quad (34)$$

Рівняння розв’язується на часовому проміжку $t \in [0, T]$. При заданій кількості ітерацій N (кількості точок часового ряду) приріст часу визначається як $\Delta t = T/N$. Сила W_i має такі властивості (порівняно з (25)):

$$\langle W_i \rangle = 0, \quad \langle W_i W_{i'} \rangle = 0, \quad \langle W_i^2 \rangle \rightarrow 2. \quad (35)$$

Адекватно представити випадкову силу, що має властивості білого шуму, дозволяє модель Бокса–Мюллера [37]:

$$W_i = \sqrt{\mu^2} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_n \in (0, 1], \quad (36)$$

де відповідно до (35) дисперсія $\mu^2 = 2$, а W_i – абсолютно випадкове число з властивостями (35). Псевдовипадкові числа r_1 і r_2 мають рівномірний розподіл.

Ефективний потенціал (28) має мінімуми при додатному та від’ємному значеннях напружень σ . Тому під час чисельного розв’язання рівняння (33) за рахунок флуктуацій можуть здійснюватись переходи системи між станами, що відповідають зазначеним мінімумам. Оскільки ми розглядаємо рух верхньої поверхні, що зміщується в один бік, далі проаналізовано поведінку $|\sigma|(t)$. Типові реалізації $|\sigma|(t)$ для режимів, що розглядаються, наведено на рис. 3.

Під час сухого тертя (режим DF) видно довготривалі ділянки, на яких напруження близькі до нульового значення, розмежовані вузькими піками. На вставці до рисунка показано залежність $|\sigma|(t)$ при багатократному збільшенні. Видно, що характер поведінки під час збільшення масштабу не змінюється,

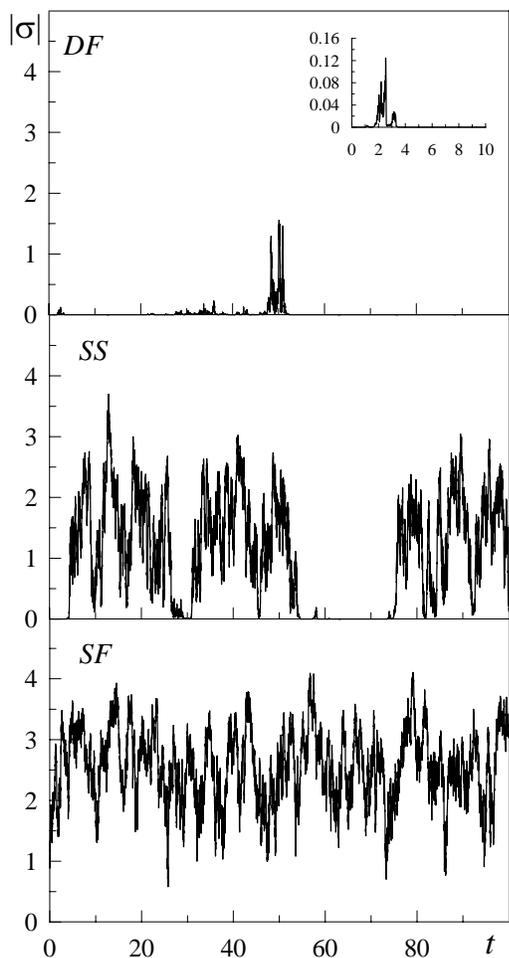


Рис. 3. Часові ряди напружень $|\sigma(t)|$, отримані в результаті ітераційної процедури (34) при $N = 10^4, t = 100, \Delta t = 0,01$. Режими, вказані на рисунку, відповідають точкам на фазовій діаграмі (див. рис. 1)

що відповідає самоподібній поведінці. При параметрах переривчастого тертя (*SS*) відбуваються випадкові переходи між нульовим і ненульовим значеннями напружень σ . У режимі рідинного тертя *SF* відбуваються флуктуації поблизу ненульового середнього значення напружень.

5. Мультифрактальний флуктуаційний аналіз самоподібних часових рядів

Мультифрактальний флуктуаційний аналіз дозволяє чисельно розрахувати основні мультифрактальні характеристики [38], за допомогою яких проводиться опис самоподібних систем. Такий аналіз проводиться в межах методу, вперше запропонованого в роботі

[39]. Для самоподібних часових рядів сутність методу полягає у чисельному розрахунку флуктуаційної функції $F_q(s)$, пов'язаної скейлінговим співвідношенням з параметром масштабу s [39]:

$$F_q \sim s^{h(q)}, \tag{37}$$

де $h(q)$ – узагальнений показник Херста, що залежить від параметра q , який може набувати будь-яких дійсних значень (варто зазначити, що $h(q)$ при $q = 2$ відповідає класичному показнику Херста H [40]). Таким чином, функція $h(q)$ розраховується як кут нахилу залежності $F_q(s)$, яка в логарифмічних координатах повинна мати лінійний вигляд.

Самоподібні властивості часових рядів більш зручно описувати за допомогою функції мультифрактального спектра $f(\alpha)$ [38, 39]:

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1, \tag{38}$$

де α – показник Гельдера, що розраховується за формулою

$$\alpha = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq}. \tag{39}$$

Вигляд зазначених залежностей характеризує властивості часового ряду. Наприклад, постійне значення $h(q) = \text{const}$ відповідає простому монофрактальному ряду. Спадання функції $h(q)$ зі збільшенням q притаманне більш складним мультифрактальним рядам, для яких спостерігається існування спектра фрактальних вимірностей. При цьому для монофрактальних об'єктів існує єдине значення показника Гельдера α , і залежність $f(\alpha)$ має вигляд дельта-функції. У випадку мультифрактального ряду реалізується спектр значень $f(\alpha)$.

У загальному випадку для часових рядів визначають два типи походження мультифрактальних властивостей: мультифрактальність зумовлена широкою функцією розподілу ймовірностей для значень елементів ряду, а також мультифрактальність, що спричиняється часовими кореляціями між членами ряду. Якщо “перемішати” ряд, тобто переставити його складові випадковим чином, то для першого типу мультифрактальні властивості не порушуються, тоді як у другому випадку таке перегрупування членів зруйнує наявні кореляції. Оскільки при цьому зникає “причина” мультифрактальності, сильно корельований складний ряд перетворюється на більш простий – монофрактальний. У випадку, коли часовому ряду притаманні обидва типи походження мультифрактальних властивостей, відповідний “перемішаний” ряд буде характеризуватися більш слабкими самоподібними

властивостями і, відповідно, більш вузьким спектром фрактальних вимірностей $f(\alpha)$, ніж вихідний “оригінальний” ряд [39]. Таким чином, досліджуючи оригінальні та відповідні перемішані часові ряди методом [39], можна визначити наявність часових кореляцій і причину походження самоподібних властивостей.

Використовуючи зазначений метод, проаналізуємо часові ряди напружень $|\sigma|(t)$, наведені на рис. 3. Для цього при параметрах $N = 10^5$, $t = 5 \cdot 10^3$, $\Delta t = 0,05$ розрахуємо залежності $h(q)$ і $f(\alpha)^2$. Виходячи із показаних на рис. 4 залежностей, видно, що найбільш виразно мультифрактальні властивості виявляються у ряді, що відповідає режиму SS , а для ряду, що відповідає режиму SF , характерна слабка залежність параметра h від q , однак, при цьому ряд також є мультифрактальним.

Виразена мультифрактальність для режиму SS пояснюється тим, що функція розподілу в цьому режимі при малих значеннях напружень має спадаючий степеневий вигляд, що і відповідає самоподібним системам. У режимі SF мультифрактальність менше виражена, оскільки зазначена особливість $P(\sigma)$ не реалізується. Відповідно до наведеного опису можна зробити висновки, що виражена мультифрактальність зумовлена степеневим виглядом функції розподілу. Щоб простежити, чи є у даному випадку степеневий вигляд $P(\sigma)$ достатньою умовою існування мультифрактальності, треба “перемішати” досліджувані часові ряди і знову знайти фрактальні характеристики системи. При “перемішуванні” ряду кореляції зникли, однак, оскільки при випадковому розташуванні елементів ряду не змінюється їх власні значення, вигляд функції розподілу лишається незмінним.

Група кривих 2 на рис. 4 відповідає аналізу рядів після зміни розташування їх елементів. Видно, що $h(q)$ є однаковою прямою $h = 0,5$ для параметрів всіх рядів, а залежність $f(\alpha)$ має вигляд дельта-функції малої ширини. Такі особливості відповідають монофрактальним рядам, причому значення $h = 0,5$ характерне для рядів, в яких відсутні кореляції. Таким чином, для зазначеної системи самоподібні властивості відповідних часових рядів напружень зумовлені степеневим виглядом функції розподілу, а також

² Для режиму DF подальші розрахунки не наводяться, оскільки зазначений метод для рядів, подібних до ряду DF , наведеному на рис. 3 (рідкі піки, розмежовані значеннями, близькими до нульових), дає суттєву похибку, зокрема, $h(q)$ в деякому діапазоні q стає зростаючою функцією, що не є фізичним. Однак, навіть тоді можна однозначно стверджувати, що ряд для режиму DF є мультифрактальним, оскільки $h(q)$ спадає при великих значеннях q .

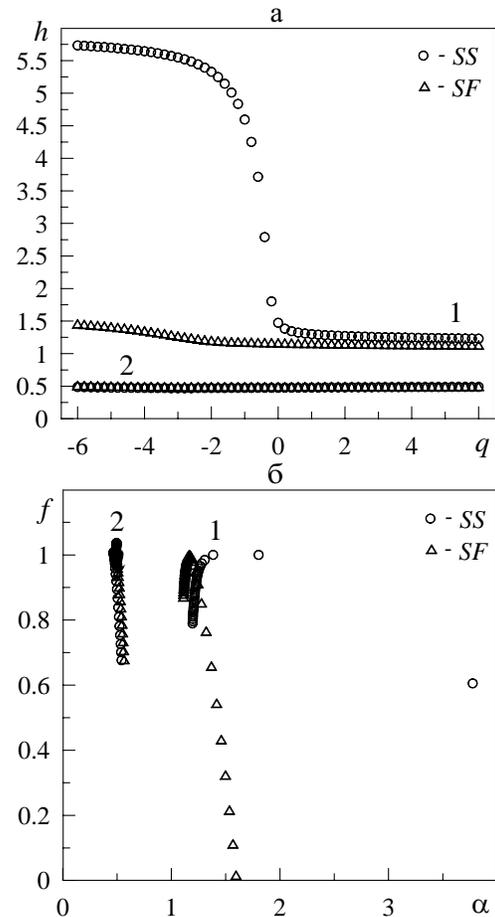


Рис. 4. Мультифрактальні характеристики $h(q)$ і $f(\alpha)$, відповідні до параметрів рядів, показаних на рис. 3. Група кривих 1 відповідає рядам, отриманим безпосередньо при використанні ітераційної процедури (34), а група кривих 2 відповідає цим же “перемішаним” рядам

наявністю кореляцій. Якщо порушується степеневий вигляд $P(\sigma)$ або не реалізуються кореляції, мультифрактальність зникає.

6. Висновки

Досліджено плавлення ультратонкої плівки мастила в межах реологічної моделі, що параметризується зсувними напруженнями та деформацією, а також температурою мастила. Знайдено три режими поведінки мастила, які характеризуються різним набором максимумів функцій розподілу напружень за величиною. Для кожного режиму в межах чисельного моделювання, аналізуючи рівняння Ланжевена, побудовано часові ряди напружень. Розраховано основні мультифрактальні характеристики і знайдено, що похо-

дження самоподібних властивостей зумовлене присутніми у часовому ряді кореляціями та степеневим виглядом функції розподілу. Степеневий розподіл спостерігається у тому випадку, коли інтенсивність шуму температури в багато разів перевищує інтенсивність шумів напружень та деформацій. Відповідно до здійсненого розгляду при досліджуваних параметрах часові ряди, що відповідають всім режимам тертя, є мультифрактальними. Певно, мультифрактальність ряду, що відповідає режиму SF , зумовлена зростаючим степеневим виглядом $P(\sigma)$. Оскільки при цьому ймовірність реалізації напружень, що відповідають степеневому вигляду $P(\sigma)$, мала, спостерігається слабо виражена мультифрактальність.

Виражаємо подяку Державному фонду фундаментальних досліджень України (гранти Ф25/668-2007, Ф25/97-2008) за підтримку роботи.

1. B.N.J. Persson, *Sliding friction. Physical principles and applications* (Springer, Berlin, 1998).
2. E.A. Brener and V.I. Marchenko, *JETP Lett.* **76**, 211 (2002).
3. H. Yoshizawa, Y.-L. Chen, and J. Israelachvili, *J. Phys. Chem.* **97**, 4128 (1993); H. Yoshizawa and J. Israelachvili, *J. Phys. Chem.* **97**, 11300 (1993).
4. J.M. Carlson and A.A. Batista, *Phys. Rev. E* **53**, 4153 (1996).
5. I.S. Aranson, L.S. Tsimring, and V.M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **65**, 125402 (2002).
6. A.E. Filippov, J. Klafter, and M. Urbakh, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 135503 (2004).
7. В.Л. Попов, *ЖТФ* **71**, 100 (2001).
8. A.V. Khomenko and O.V. Yushchenko, *Phys. Rev. E* **68**, 036110 (2003).
9. A.V. Khomenko, *Phys. Lett. A* **329**, 140 (2004).
10. A.V. Хоменко, Я.А. Ляшенко, *ЖТФ* **75**, 17 (2005).
11. A.V. Khomenko and I.A. Lyashenko, *FNL* **7**, L111 (2007).
12. A.V. Хоменко, Я.А. Ляшенко, *ФТТ* **49**, 886 (2007).
13. A.V. Khomenko and I.A. Lyashenko, *Phys. Lett. A* **366**, 165 (2007).
14. A.V. Хоменко, Я.А. Ляшенко, *ЖТФ* **77**, 137 (2007).
15. J.L. Parker and H.K. Christenson, *J. Chem. Phys.* **88**, 8013 (1988).
16. О.С. Киселевский, В.П. Казаченко, *Трение и износ* **27**, 304 (2006).
17. S.V. Buldyrev, J. Ferrante, and F.R. Zypman, *Phys. Rev. E* **74**, 066110 (2006).
18. F. Slanina, *Phys. Rev. E* **59**, 3947 (1999).
19. D.P. Vallette, and J.P. Gollub, *Phys. Rev. E* **47**, 820 (1993).
20. Е.А. Торопов, Д.О. Харченко, *Изв. ВУЗов, физика* **4**, 75 (1996).
21. *Реология: Теория и приложения*, под ред. Ф. Эйриха (Иностр. лит., Москва, 1962).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости* (ИФМЛ, Москва, 2007).
23. A. Navranek and M. Marvan, *Ferroelectrics* **176**, 25 (1996).
24. А.И. Олемской, Е.А. Торопов, *Физика металлов и металловедение* **9**, 5 (1991).
25. Г. Хакен, *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам* (Мир, Москва, 2005); H. Haken, *Information and self-organization. A macroscopic approach to complex systems* (Springer, New York, 2000).
26. А.И. Олемской, А.В. Хоменко, *ЖЭТФ* **110**, 2144 (1996).
27. А.И. Олемской, А.В. Хоменко, *ЖТФ* **70**, 6 (2000); А.И. Олемской, А.В. Хоменко, *ЖТФ* **70**, 10 (2000).
28. E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
29. J. Israelachvili, *Surf. Sci. Rep.* **14**, 109 (1992).
30. A.L. Demirel and S. Granick, *J. Chem. Phys.* **109**, 6889 (1998).
31. G. Reiter, A.L. Demirel, J. Peanasky *et al.*, in *Physics of Sliding Friction*, edited by B.N.J. Persson and E. Tosatti (Kluwer, Dordrecht, 1995), p. 119.
32. G. Luengo, J. Israelachvili, and S. Granick, *Wear* **200**, 328 (1996).
33. H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer, Berlin, 1989).
34. D.J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (McGraw-Hill, New York, 1978).
35. К.В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках* (Наука, Москва, 1985); C.W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods* (Springer, Berlin, 1994).
36. В. Хорстемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1987); V. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transitions* (Springer, Berlin, 1984).
37. W.H. Press, B.P. Flannery, W.T. Vetterling, and S.A. Teukolsky, *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, New York, 2002).
38. A.I. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in: *Physics Reviews*, ed. I.M. Khalatnikov, **18**, Part 1, (1995).

39. J.W. Kantellhardt, S.A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde *et al.*, *Physica A* **316**, 87 (2002).

40. Е. Федер, *Фракталы* (Мир, Москва, 1991).

Одержано 29.12.08

САМОПОДОБНАЯ ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ

А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко, В.Н. Борисюк

Резюме

Исследуется плавление ультратонкой пленки смазки, зажатой между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями. При учете аддитивных шумов напряжений, деформации и температуры построена фазовая диаграмма с областями жидкостного, сухого и прерывистого трения. Для параметров всех режимов в рамках исчисления Стратоновича построены временные ряды напряжений. В случае, когда интенсивность шума температуры намного превышает интенсивности шумов напряжений и деформации, устанавливается самоподобный режим при плавлении смазки. Показано, что мультифрактальность временных рядов напряжений обеспечивается степенным ви-

дом функции распределения и наличием в системе корреляций.

SELF-SIMILAR PHASE DYNAMICS OF BOUNDARY FRICTION

A.V. Khomenko, I.A. Lyashenko, V.N. Borisyuk

Sumy State University
(2, *Rymskyi-Korsakov Str.*, Sumy 40007, Ukraine;
e-mail: *hom@mss.sumdu.edu.ua, nabla04@ukr.net*)

S u m m a r y

The melting of an ultrathin lubricant film confined between two atomically flat solid surfaces has been studied. The phase diagram with the domains of sliding, dry, and intermittent (stick-slip) frictions has been constructed, by taking the additive noises of stress, strain, and temperature into account. The time series of stresses have been constructed for the parameters of all the modes within the Stratonovich calculus. In the case where the temperature noise intensity exceeds much more the intensities of stress and strain noises, the self-similar mode is established during the melting of a lubricant. The multifractality of the stress time series is shown to be provided by the power-law shape of the distribution function and by the presence of correlations in the system.